STUDIO DI UNA FUNZIONE

$y = f(x)$

Per disegnare la funzione (lo studio di una funzione ha come scopo finale quello di poter tracciare il grafico) imposto un grafico abbastanza grande e leggibile all'inizio. Mano a mano che analizzo i vari punti (dominio, segni, andamento ecc…) completo il grafico con le informazioni che acquisisco.

DOMINIO

Il dominio sono le condizioni di esistenza (C.E.) della funzione. Per una funzione periodica (ovvero che si ripete nel tempo, es: $sen(x)$) si studia $f(x)$ solo nel periodo. Per semplicità dei passaggi successivi il dominio è meglio scriverlo in forma di intervalli.

C.E.:

$$\frac{a}{b} \Rightarrow b \neq 0$$
$$\sqrt[n]{a} \Rightarrow a \geq 0 \wedge n\ pari$$
$$tg(a) \Rightarrow a \neq \frac{\pi}{2}$$
$$cotg(a) \Rightarrow a \neq \pi$$
$$arcsen(a)\ o\ arccos(a) \Rightarrow -1 \leq a \leq 1$$
$$log_a(b) \Rightarrow b > 0$$

Esempio:

$y = \frac{1}{x+1}$

C.E.:

$$x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$$
$$Dom\ \{-\infty - -1\ \vee\ -1 - +\infty\}$$

SIMMETRIE

Le simmetrie vanno verificate solo se il dominio possiede una simmetria (altrimenti significa che la funzione non è sicuramente simmetrica). Il dominio è simmetrico se ciò che succede a destra dello 0 succede anche a sinistra (es: $Dom\ \{-\infty - -1\ \vee\ 1 - +\infty\}$).
Per funzioni conosciute possono non essere analizzate (una funzione polinomiale con tutti i termini di grado pari è sicuramente simmetrica, es: $y = x^4 + x^2 + 3$).

$$f(x) = f(-x) \Rightarrow funzione\ pari$$
$$f(-x) = -f(x) \Rightarrow funzione\ dispari$$

STUDIO DEL SEGNO E INTERSEZIONI CON GLI ASSI

Verifico quando la funzione è positiva, negativa, quando interseca l'asse x e l'asse y.

$f(x) = 0 \Rightarrow$ *intersezioni con asse x*

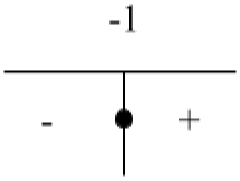
$f(x) > 0 \Rightarrow$ *vedo dove* $f(x)$ è *positiva e negativa*

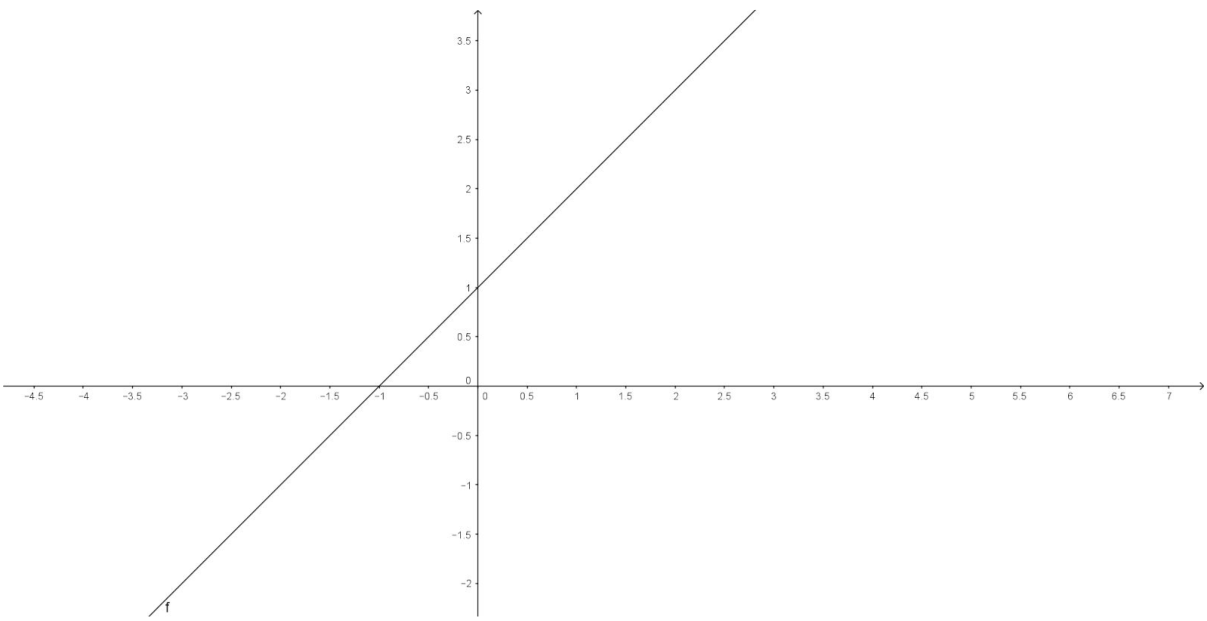
$f(0) = l \Rightarrow$ *intersezioni con asse y*

N.B.: Ricordarsi di fare la tabella dei segni, dove indico quando la funzione si annulla (intersezioni con asse x), dove la funzione è positiva e dove è negativa.
Se $f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ non calcolo l'intersezione con l'asse y perché so già che la funzione interseca l'asse nel punto $P(0,0)$

Esempio:

$$y = x + 1$$
$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$
$$x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$$





PUNTI DI DISCONTINUITÀ

Per trovare i punti di discontinuità analizzo i punti del dominio dove la funzione non è definita oppure, se la funzione è definita per casi, analizzo gli estremi degli intervalli dei vari casi in cui la funzione è definita. In particolare trovo il limite destro e sinistro di ogni punto:

- $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = a \ \wedge \ \lim_{x \to x_0^-} f(x) = b \ \ con\ b \neq a$ $\quad X_o$ è un <u>punto di discontinuità di prima specie</u>
- $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$ $\ X_o$ è un <u>punto di discontinuità di seconda specie</u> (ed è anche asintoto verticale).
- $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = a \ \wedge \ \lim_{x \to x_0^-} f(x) = a \ \wedge \ f(x_0) \neq a$ $\quad X_o$ è un <u>punto di discontinuità di terza specie</u>

Esempi:

$f(x) \ = \ x + 2 \ \ se\ 1 < x < 2$

$f(x) \ = \ 3 \ \ se\ 2 \leq x < 5$

Analizzo il limite di $f(x)$ in 2

$\lim_{x \to 2^+} 3 = 3$, $\lim_{x \to 2^-} x + 2 = 4$

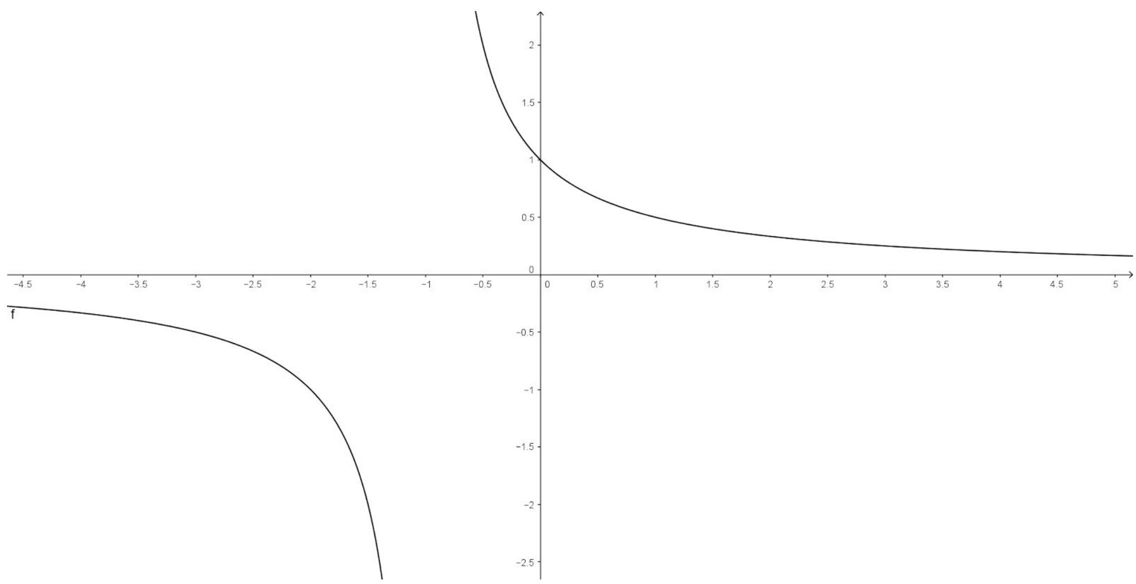
$x_0 = 2$ è un punto di discontinuità di prima specie

$y = \frac{1}{x+1}$

Analizzo il limite di $f(x)$ in -1, dove l funzione non è definita

$\lim_{x \to -1} f(x) = \infty$

$x_0 = -1$ è un punto di discontinuità di seconda specie



ASINTOTI

Gli asintoti sono rette a cui la funzione si avvicina sempre più, ma senza mai incrociarsi con essa. Sono di tre tipi: verticali, orizzontali e obliqui.
Per trovare gli asintoti si utilizzano i limiti:

- **Asintoto verticale**: Se il dominio non è definito in un punto X_0, calcolo il limite (destro e sinistro) della funzione tendente a quel punto:

  $$\lim_{x \to x_0^{\pm}} f(x) = \infty$$

  Se il limite risulta infinito $x = x_0$ è <u>asintoto verticale</u>

- **Asintoto orizzontale**: Se il dominio ha come estremi $\pm\infty$ può esserci un asintoto orizzontale o obliquo. In particolare, se:

  $$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = l$$

  $y = l$ è <u>asintoto orizzontale</u>

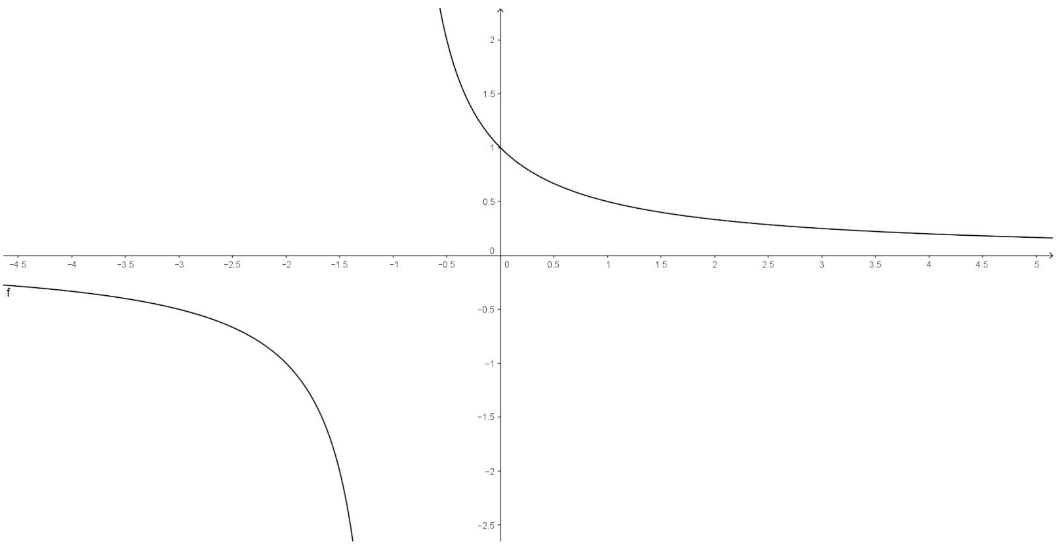
- **Asintoto obliquo**: Se il dominio ha come estremi $\pm\infty$ può esserci un asintoto orizzontale o obliquo. In particolare, se:

  $$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \infty$$

  Può esserci un <u>asintoto obliquo</u> $y = mx + q$, dove:

  $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m$, dove $m \neq 0 \wedge m \neq \infty$

  $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - mx \ = \ q$, dove $q \neq \infty$



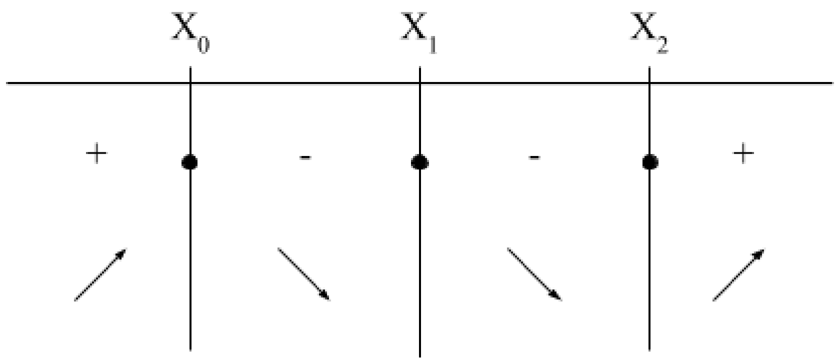
ANDAMENTO, PUNTI DI NON DERIVABILITÀ, FLESSI ORIZZONTALI

Per vedere l'andamento della funzione, i suoi punti di non derivabilità e i flessi orizzontali studio la derivata prima $y = f'(x)$.

1. Confronto il dominio della derivata con quello della funzione. Se la funzione è discontinua in un punto in quel punto la funziona sarà anche non derivabile.
2. Trovo i punti di non derivabilità con lo stesso metodo usato per i punti di discontinuità (funzioni definite per casi, dominio, limite ecc…)
    a. $\lim_{x \to x_0^+} f'(x) = a \wedge \lim_{x \to x_0^-} f'(x) = b \ \ con\ b \neq a$ $\quad X_o$ è un <u>punto angoloso</u>
    b. $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$ $\ X_o$ è un <u>punto di flesso a tangente verticale</u>
    c. $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty \wedge \lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$ (o viceversa) X_o è un <u>punto di cuspide</u>
3. $f'(x) \geq 0$ trovo l'andamento della funzione con lo stesso metodo dei segni. Dove $f'(x) > 0$ la funzione cresce, dove $f'(x) < 0$ la funzione decresce, dove $f'(x) = 0$ la funzione può avere un punto stazionario (massimo o minimo relativo/assoluto) o un punto di flesso orizzontale

Analizzando la derivata prima della funzione faccio una tabella dei segni e degli zeri.

Esempio:



In questo caso:

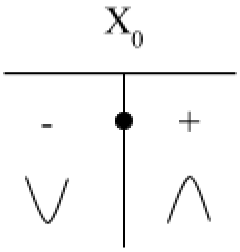
- X_0 è un punto stazionario (in particolare punto di massimo)
- X_1 è un punto di flesso orizzontale
- X_2 è un punto stazionario (in particolare punto di minimo)

FLESSI OBLIQUI E CONCAVITÀ DELLA FUNZIONE

Un flesso obliquo si trova quando la funzione cambia verso della concavità. Per trovare questo punto e le concavità della funzione bisogna analizzare la derivata seconda $f''(x)$.
$f''(x) = 0$ i risultati mi daranno i punti di flesso a tangente orizzontale o obliqua
$f''(x) > 0$ mi dirà la concavità della funzione

È sempre consigliato fare la tabella dei segni e degli zeri

Esempio:



In X_0 la funzione ha un asintoto obliquo, prima ha una concavità rivolta verso l'alto, dopo verso il basso